Wyzwanie 7 dni. Dzień1. Planimetria – trójkąty

Część teoretyczna

I. Dowolne trójkąty:

1. **Trójkąty przystające**
    a. Oznaczenie: $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$
    b. kąty takie same
    c. boki takie same
    d. cechy przystawania: kbk, bkb, bbb
2. **Trójkąty podobne**
    a. Oznaczenie: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$
    b. kąty takie same
    c. boki proporcjonalne – stosunek odpowiednich boków (**a także wysokości/ środkowych/ oraz obwodów!**) jest stały i równy **k** (**k** – skala podobieństwa)
    d. **stosunek pól trójkątów podobnych równy k^2** (kwadrat skali podobieństwa)
    e. cechy przystawania: kk, bkb, bbb
3. **Własności w dowolnych trójkątach:**
    a. Suma kątów w każdym trójkącie to 180 stopni.
4. **Twierdzenia związane z trójkątami:**
    a. Trójkąt prostokątny:
        i. Tw. Pitagorasa (szczególny przypadek tw. cosinusów):
            1. 2 boki -> 3. Bok
        ii. Tw. Odwrotne do Tw. Pitagorasa:
            1. Służy do dowodzenia tego, że kąt jest prosty
        iii. Funkcje trygonometryczne (szczególny przypadek tw. Sinusów)
            1. 2 boki -> dowolny kąt
            2. 1 kąt, 1 bok -> dowolny bok
    b. Trójkąt równoramienny – często warto podzielić go wysokością na 2 przystające trójkąty prostokątne, jeśli to nie poskutkuje stosujemy tw. Sinusów lub cosinusów
    c. Pozostałe trójkąty:
        i. Tw. Cosinusów (uogólnienie tw. Pitagorasa na dowolne trójkąty):
            1. 2 boki i dowolny kąt (niekoniecznie między nimi!) ->3. bok
            2. 3 boki -> dowolny z kątów
        ii. Tw. Sinusów:
            1. 2 boki, 1 kąt -> pozostałe kąty
            2. 1 bok, 2 kąty -> pozostałe boki
            3. Bok i kąt naprzeciwko -> R (promień okręgu opisanego)
            4. R i jeden z boków -> kąt na przeciwko boku
            5. R i jeden z kątów -> bok na przeciwko kąta

Twierdzenie cosinusów

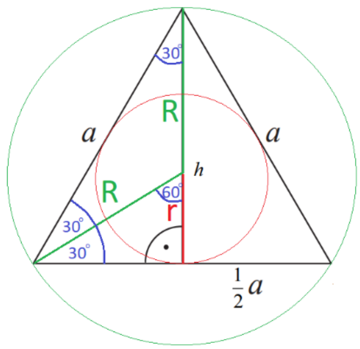
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

5. **Odcinki (Półproste oraz Proste) w dowolnych trójkątach:**
    1. **Wysokości w każdym trójkącie**:
        a. To odcinki
        b. Są 3
        c. Przecinają się w 1 punkcie
        d. wychodzą z każdego wierzchołka
        e. padają pod kątem prostym na przeciwległy bok
    2. **Środkowe w każdym trójkącie**
        a. To odcinki
        b. Są 3
        c. Przecinają się w 1 punkcie **w stosunku 2:1 licząc od wierzchołka**
        d. wychodzą z każdego wierzchołka
        e. padają na środek przeciwległego boku (dzieląc go na 2 równe odcinki)
    3. **Dwusieczne kątów w każdym trójkącie**
        a. To półproste
        b. Są 3
        c. Przecinają się w 1 punkcie (**środek okręgu wpisanego)**
        d. wychodzą z każdego wierzchołka
        e. dzielą kąt przy wierzchołku, z którego wychodzą na 2 równe kąty
        f. miejsce przecięcia –
    4. **Symetralne boków w każdym trójkącie**
        a. To proste
        b. Są 3
        c. Przecinają się w 1 punkcie (**środek okręgu opisanego)**
        d. Przecinają każdy z boków w połowie, pod kątem prostym

II. Trójkąt równoboczny i jego połowa – trójkąt "ekierka" – trójkąt o kątach 30°,60°,90°

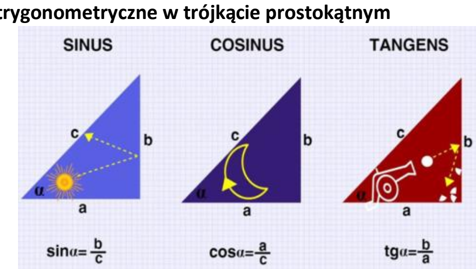


$R = \frac{2}{3}h$ $\quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$r = \frac{1}{3}h$ $\quad P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

III. Wariacje na temat trójkątów prostokątnych

1. **Trójkąty szczególne**
   a. Trójkąt 45°,45°,90° (połówka kwadratu)
   b. Trójkąt 30°,60°,90° (połówka trójkąta równobocznego)

2. **Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym**
   a. 

3. **Odcinki w trójkącie prostokątnym:**
   a. **Wysokości w trójkącie prostokątnym**
      i. **Dwie wysokości to boki**
      ii. Trzecia wysokość dzieli trójkąt na 3 trójkąty podobne. Z podobieństwa tych 3 trójkątów można obliczyć zarówno tę wysokość jak i długości odcinków na jakie ta wysokość podzieli przeciwprostokątną
   b. **Dwusieczne w trójkącie prostokątnym**
      i. Dwusieczna wychodząca z kąta prostego dzieli kąt na kąty po 45 stopni
   c. **Środkowe w trójkącie prostokątnym**
      i. Jak w każdym trójkącie dzielą się w stosunku 2:1 (licząc od wierzchołka)
      ii. Środkowa wychodząca z kata prostego dzieli ten trójkąt na 2 trójkąty równoramienne (są one przystające tylko w trójkącie 45,45,90)
   d. **Symetralne boków**
      i. Przecięcie symetralnych leży na środku przeciwprostokątnej (jest to środek okręgu opisanego na tym trójkącie)

4. **Okręgi opisane I wpisane**
   a. **Okrąg opisany na trójkącie prostokątnym**
      i. Środek okręgu znajduje się w połowie przeciwprostokątnej
      ii. Przeciwprostokątna jest średnicą okręgu (bo kąt wpisany oparty na średnicy jest prosty)
      iii. $R = \frac{1}{2}c$
   b. **Okrąg wpisany w trójkąt prostokątnym**
      i. Środek okręgu znajduje się w odległości $r\sqrt{2}$ od wierzchołka kata prostego
      ii. $r = p - c = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b}{2} - R$ (p -połowa obwodu trójkąta, c- przeciwprostokątna)

5. **Pola trójkątów**
   a. **Częsta technika –** obliczanie pól na 2 sposoby w celu wyznaczenia wielkości występujących we wzorze na pole (np. w celu wyznaczenia promienia okręgu wpisanego / opisanego na trójkącie)
   b. **Wzory na pola trójkątów:**

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h_b = \frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a\cdot b\cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}a\cdot c\cdot \sin\beta = \frac{1}{2}b\cdot c\cdot \sin\alpha$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}b^2\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{1}{2}c^2\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} \qquad P_{\Delta ABC} = 2R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$$

$$P_{\Delta ABC} = rp \qquad P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Część praktyczna

1. **[Trójkąt równoboczny] Dany jest trójkąt równoboczny ABC o polu 10. Oblicz:**
    a. Długość odcinka poprowadzonego z jednego z wierzchołków, który dzieli naprzeciwległy bok w stosunku 2:3
    b. Promień okręgu wpisanego i opisanego na trójkącie ostrokątnym, którego jeden z boków to powyzszy odcinek.
    c. Cosinusy kątów w powyższym trójkącie
    d. Długość boku kwadratu wpisanego w ten trójkąt, w taki sposób, że jeden z boków tego kwadratu leży najednym z boków tego trójkata
    e. Stosunek pola okręgu wpisanego w trójkąt ABD do pola okręgu wpisanego w trójkąt BDC (D – pkt przecięcia odcinka poprowadzonego z punktu B, w taki sposób, że odcinek BD dzieli odcinek AC w stosunku 2:3.

2. **[Trójkąt prostokątny] Dany jest trójkąt o przyprostokątnych 3 I 4. Oblicz:**
    a. Długości wszystkich wysokości w tym trókącie
    b. Długości wszystkich środkowych w tym trókącie
    c. Długości wszystkich dwusiecznych w tym trókącie
    d. Długości odcinków na jakie wysokość wychodząca z wierzchołka kata prostego dzieli przeciwprostokątną
    e. Długości odcinków na jakie poszczególne dwusieczne dzielą boki, na które padają
    f. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt I opisanego na tym trójkącie
    g. Pole pierścienia będącego obszarem pomiędzy okręgiem wisanym w ten trójkąt, a okręgiem opisanym na tym trójkącie
    h. Długość boku kwadratu wpisanego w ten trójkąt, w taki sposób, że sąsiednie boki tego kwadratu leżą na przyprostokątnych tego trójkąta
    i. Długość boku kwadratu wpisanego w ten trójkąt, w taki sposób, że jeden z boków tego kwadratu leży na przeciwprostokątnej tego trójkąta.
    j. Długość boku możliwie największego trójkąta równobocznego wpisanego w ten trójkąt prostokątny, w taki sposób, że dolna podstawa trójkąta równobocznego leży na dłuższej przyprostokątnej trójkąta prostokątnego, a jeden z wierzchołków (trójkąta równobocznego) leży na przeciwprostokątnej(trójkąta prostokątnego)
    k. Długość odcinka poprowadzonego z wierzchołka kata prostego, który dzieli przeciwprostokątną w stosunku 2:3
    l. Stosunek pól trójkątów na jego został podzielony trójkąt prostokątny powyższym odcinkiem.
    m. Stosunek promieni okręgów wpisanych w powyższe trójkąty
    n. Stosunek promieni okręgów opisanych na powyższych trójkątach
    o. Odległość między środkami okręgów opisanego I wpisanego
    p. Odległość między wierzchołkiem kata prostego, a punktem wspólnym okręgu i przeciwprostokątnej trójkąta

3. **[Trójkąt równoramienny] Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie długości 10 i kącie** $120°$**. Oblicz:**
    a. Długości wszystkich wysokości w tym trókącie
    b. Długości wszystkich środkowych w tym trókącie
    c. Długości wszystkich dwusiecznych w tym trókącie
    d. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt I opisanego na tym trójkącie
    e. Długość boku kwadratu wpisanego w ten trójkąt, w taki sposób, że jeden z boków tego kwadratu leży na podstawie tego trójkąta
    f. Długość boku możliwie największego trójkąta równobocznego wpisanego w ten trójkąt, w taki sposób, że jeden z wierzchołków tego trójkąta leży na dolnej podstawie trójkąta równoramiennego, a dwa pozostałe leżą na jego ramionach, w takim miejscu, aby prosta przez nie przechodząca była równoległa do podstawy trójkąta równoramiennego
    g. Długość odcinka poprowadzonego z wierzchołka kata rozwartego, który dzieli podstawę tego trójkąta w stosunku 1:4
    h. Długość odcinka poprowadzonego z wierzchołka kata ostrego, który dzieli ramię tego trójkąta w stosunku 1:4
    i. Odległość między środkami okręgów opisanego I wpisanego
    j. Odległość między jednym z wierzchołków podstawy a punktem wspólnym okręgu i ramieniem trójkąta