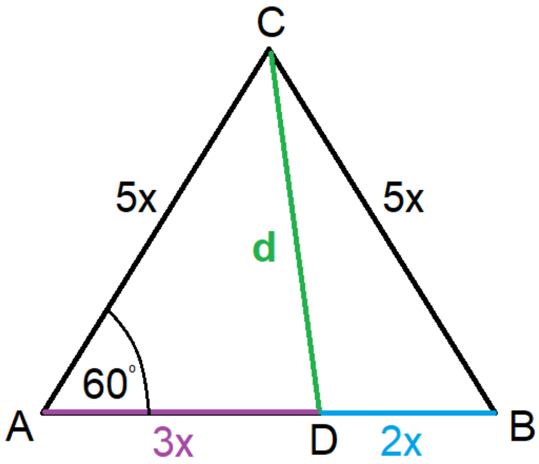
Wyzwanie 7 dni. Dzień2. Planimetria – trójkąty. Analiza przykładowych zadań.

1. **[Trójkąt równoboczny] Dany jest trójkąt równoboczny ABC o polu 10. Oblicz:**
   a. Długość odcinka poprowadzonego z jednego z wierzchołków, który dzieli naprzeciwległy bok w stosunku 2:3

1) Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.

W celu uniknięcia ułamków oznaczam $|AD| = 3x$, zamiast $|AD| = \frac{3}{5}a$



1) **Obliczam x.** Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta równobocznego w ΔABC

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$10 = \frac{(5x)^2\sqrt{3}}{4}$$
$$10 = \frac{25x^2\sqrt{3}}{4}$$
$$x^2 = \frac{4 \cdot 10}{25\sqrt{3}}$$
$$x = \frac{2\sqrt{10}}{5\sqrt{\sqrt{3}}}$$

2) **Obliczam d.** Korzystam z tw. cosinusów w ΔCAD:

$$d^2 = (5x)^2 + (3x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 3x \cdot cos60°$$
$$d^2 = 25x^2 + 9x^2 - 2 \cdot 5x \cdot 3x \cdot \frac{1}{2}$$
$$d^2 = 25x^2 + 9x^2 - 15x^2$$
$$d^2 = 19x^2$$
$$d = x\sqrt{19}$$

Łączac 1) I 2) otrzymujemy:

$$d = x\sqrt{19} = \frac{2\sqrt{10}}{5\sqrt{\sqrt{3}}}\sqrt{19} = \frac{2\sqrt{190}}{5\sqrt{\sqrt{3}}} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{190}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{190\sqrt{3}}{3}} = \frac{2}{5}\frac{\sqrt{190\sqrt{3}\sqrt{3}}}{3} = \frac{2}{15}\sqrt{570}\sqrt[4]{3}$$

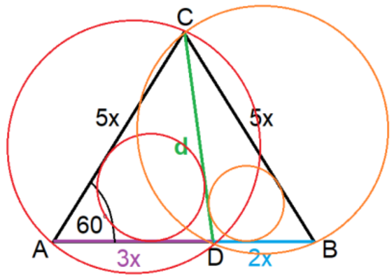
Uwaga: **każdy** z zielonych wyników i jemu równoważnych jest uznawany za poprawny.

Odp. $d = \frac{2}{15}\sqrt{570}\sqrt[4]{3}$

1. **[Trójkąt równoboczny] Dany jest trójkąt równoboczny ABC o polu 10. Oblicz:**

   b. Promień okręgu wpisanego i opisanego na trójkącie ostrokątnym, którego jeden z boków to powyższy odcinek.

Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.



- Promienie okręgów opisanych znajdziemy z tw. sinusów.
- Promienie okręgów wpisanych znajdziemy z przyrównania pól trójkątów, stosując wzory na pola trójkątów:

$$P = pr = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

$$P = \frac{1}{2}ah \textbf{ albo } P = \frac{1}{2}absin\alpha$$

Zwróć uwagę, że są 2 przypadki okręgów wpisanych i opisanych spełniających warunki zadania.

3) **Z tw. sinusów w** ΔADC: $\quad \frac{d}{sin60°} = 2R$
4) **Z tw. sinusów w** ΔCDB: $\quad \frac{d}{sin60°} = 2R$

   Zatem promienie okręgów opisanych na ΔADC i ΔCDB są sobie równe.

$$R = R = \frac{d}{2sin60°} = \frac{d}{\frac{2\sqrt{3}}{2}} = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{2}{15}\sqrt{570}\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{15}\sqrt{190}\sqrt[4]{3}$$

5) **Obliczam** pole ΔADC: Korzystam z faktu, że ΔADC oraz ΔABC, mają wspólną wysokość, różnią się tylko podstawą.

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5x \cdot h = \frac{5}{2}hx$$
$$P_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot h = \frac{3}{2}hx$$

   Podstawiając wartość pola z treści zadania:

$$\frac{5}{2}hx = 10$$
$$\frac{1}{2}hx = 2$$
$$P_{ADC} = \frac{3}{2}hx = 6$$

   Uwaga: pole ΔADC można obliczyć również ze wzoru $P = \frac{1}{2}absin60° = \frac{1}{2}3x \cdot 5x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ wstawiając w miejsce x^2 obliczoną w poprzednim zadaniu wartość.

6) **Obliczam r** ze wzoru na pole trójkąta w ΔADC:

$$P = pr = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

$$\mathbf{r} = \frac{2P}{a+b+c} = \frac{2P_{ADC}}{3x+5x+d} = \frac{2 \cdot 6}{8x + x\sqrt{19}} = \frac{12}{x}\frac{1}{8+\sqrt{19}} \cdot \frac{8-\sqrt{19}}{8-\sqrt{19}} = \frac{12}{x} \cdot \frac{8-\sqrt{19}}{64-19} = \frac{12}{45x}\left(8-\sqrt{19}\right) = \frac{4}{15x}\left(8-\sqrt{19}\right)$$
$$= \frac{4}{15 \cdot \frac{2\sqrt{10}}{5\sqrt[4]{3}}}\left(8-\sqrt{19}\right) = \frac{2}{3 \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[4]{3}}}\left(8-\sqrt{19}\right) = \frac{2\sqrt[4]{3}}{3 \cdot \sqrt{10}}\left(8-\sqrt{19}\right) = \frac{2\sqrt[4]{3}\sqrt{10}}{3 \cdot 10}\left(8-\sqrt{19}\right)$$
$$= \frac{1}{15}\left(8-\sqrt{19}\right)\sqrt[4]{3}\sqrt{10}$$

   Uwaga: zwróć uwagę na generalne podejście, które stosuję w każdym zadaniu: zmienną x podstawiłem dopiero wówczas do wzoru na r, gdy postać jest maksymalnie uproszczona (usunięta niewymierność z mianownika, poskracane ułamki itp.) To znacznie skraca czas obliczeń, które jak widać nie zawsze są łatwe, proste i przyjemne.

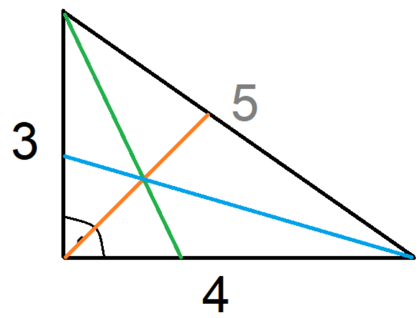
7) **Obliczam** pole ΔDBC: $\quad P_{DBC} = P_{ABC} - P_{ADC} = 10 - 6 = 4$
8) Analogicznie jak w punkcie 6) **obliczam r** ze wzoru na pole trójkąta w ΔCDB

$$r = \frac{2P}{a+b+c} = \frac{2P_{DBC}}{2x+5x+d} = \frac{2 \cdot 4}{7x + x\sqrt{19}} = \cdots$$

Dokończenie rachunków pozostawiam zainteresowanemu czytelnikowi.

2. [Trójkąt prostokątny] Dany jest trójkąt o przyprostokątnych 3 I 4. Oblicz:

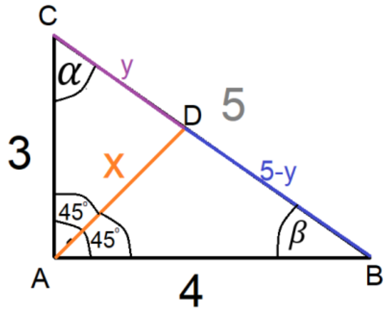
c. Długości wszystkich dwusiecznych w tym trókącie



Zaprezentuję sposób obliczenia dwusiecznej zaznaczonej kolorem pomarańczowym oraz niebieskim. Obliczenie dwusiecznej zaznaczonej kolorem zielonym robi się przez analogię. Proponuję wykonać to zadanie jako ćwiczenie zainteresowanym czytelnikom.

a) Dwusieczna pomarańczowa

1) Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.



2) Z funkcji trygonometrycznych w ΔABC:

$$sin\alpha = \frac{4}{5}$$
$$sin\beta = \frac{3}{5}$$

3) **Z tw. sinusów w ΔADC:**

$$\frac{x}{sin\alpha} = \frac{y}{sin45°}$$

4) **Z tw. sinusów w ΔADB:**

$$\frac{x}{sin\beta} = \frac{5-y}{sin45°}$$

5) Łączymy powyższe równania w układ równań i rozwiązujemy go:

$$\begin{cases} \frac{x}{\frac{4}{5}} = \frac{y}{sin45°} \\ \frac{x}{\frac{3}{5}} = \frac{5-y}{sin45°} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\,sin45° = \frac{4}{5}y \\ x\,sin45° = \frac{3}{5}(5-y) \end{cases}$$

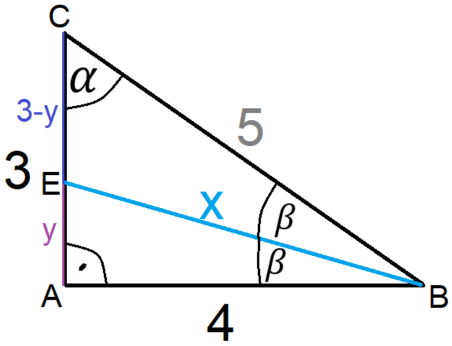
$$\frac{4}{5}y = \frac{3}{5}(5-y)$$
$$4y = 3(5-y)$$
$$4y = 15-3y$$
$$7y = 15$$
$$y = \frac{15}{7}$$

$$x = \frac{4}{5}\cdot\frac{y}{sin45°} = \frac{4}{5}\cdot\frac{\frac{15}{7}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{5}\cdot\frac{15}{7}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{4}{1}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{1}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{12}{7}\sqrt{2}$$

Uwaga: powyższe zadanie da się też szybko obliczyć z tw. o dwusiecznej (które z kolei dowodzi się np. korzystając z tw. sinusów, zatem powyższe rozwiązania są równoważne).

b) Dwusieczna niebieska

1) Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.



2) Z funkcji trygonometrycznych w ΔABC:

$$sin\alpha = \frac{4}{5}$$

3) Z funkcji trygonometrycznych w ΔABE:

$$sin\beta = \frac{y}{x}$$

4) **Z tw. Pitagorasa** w ΔAEB:

$$y^2 + 4^2 = x^2$$

5) **Z tw. sinusów w** ΔBCE:

$$\frac{x}{sin\alpha} = \frac{3-y}{sin\beta}$$

6) Łączymy powyższe równania w układ równań i rozwiązujemy go:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\frac{4}{5}} = \dfrac{3-y}{\frac{y}{x}} \\ y^2 + 4^2 = x^2 \end{cases}$$

$$x \cdot \frac{y}{x} = \frac{4}{5}(3-y)$$

$$y = \frac{4}{5}(3-y)$$

$$5y = 4(3-y)$$

$$9y = 12$$

$$y = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$x^2 = y^2 + 4^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4^2 = 4^2\left(\frac{1}{9} + 1\right) = 4^2 \cdot \frac{10}{9} = \frac{4^2}{3^2} \cdot 10$$

$$\boldsymbol{x = \frac{4}{3}\sqrt{10}}$$

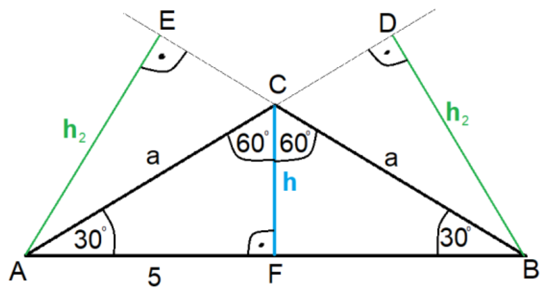
c) Dwusieczna zielona

Proponuję wykonać to zadanie jako ćwiczenie.

3. <u>[Trójkąt równoramienny]</u> Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie długości 10 i kącie $120°$. Oblicz:

a. Długości wszystkich wysokości w tym trókącie

1) Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.



Ponieważ trójkąt ABC jest rozwartokątny to 2 spośród wysokości znajdują się poza tym trójkątem i padają na przedłużenia jego boków. Z faktu, że trójkąt jest równoramienny wynika, że:

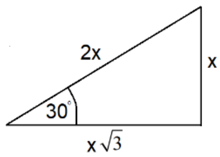
1) Wysokości **AE** oraz **DB** są równej długości. Stąd $|\mathrm{AE}| = |\mathrm{DB}| = h_2$
2) Wysokość **CF** dzieli kąt ACB na 2 kąty o tej samej mierze, stąd $|\sphericalangle ACF| = |\sphericalangle FCB| = 60°$
3) Wysokość **CF** dzieli podstawę na połowy, stąd |AF|=5.

1) Obliczymy **h** na 3 sposoby:

a. **SPOSÓB I.** Z własności trójkąta szczególnego $30°, 60°, 90°$ w ΔAFC

$$|AF| = x\sqrt{3} = 5$$

$$\boldsymbol{h} = x = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$



a. **SPOSÓB II.** Z funkcji trygonometrycznych w ΔAFC:

$$tg30° = \frac{h}{5}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{5}$$
$$h = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

a. **SPOSÓB III (nieefektywny).** Z tw. cosinusów w ΔABC ...

$$10^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot acos120°$$
$$10^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a\cos(90° + 30°)$$
$$100 = 2a^2 - 2a^2(-\sin 30°)$$
$$50 = a^2 + \frac{a^2}{2}$$
$$50 = \frac{3}{2}a^2$$
$$\frac{100}{3} = a^2$$
$$\frac{10}{\sqrt{3}} = a$$
$$\frac{10\sqrt{3}}{3} = a$$

... a następnie z porównania wzorów na pole trójkąta:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot a \cdot sin30° = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \mathbf{h}$$
$$a \cdot sin30° = \mathbf{h}$$
$$\mathbf{h} = a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2} = \frac{\frac{10\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

2) Wysokość $\boldsymbol{h_2}$ można z kolei łatwo policzyć z:

a. **SPOSÓB I.** Z własności trójkąta szczególnego $30°, 60°, 90°$ w ΔABE
b. **SPOSÓB II.** Z funkcji trygonometrycznych w ΔABE
c. **SPOSÓB III.** Korzystając z przystawania trókątów AFC oraz AEC (cecha kbk)
d. **SPOSÓB IV.** Z równości pola ΔABC wyrażonego na 2 sposoby $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 10h = \frac{1}{2}\boldsymbol{ah_2}$ (o ile znamy już **a** oraz **h**)

Proponuję wykonać to zadanie jako ćwiczenie (każdym sposobem)