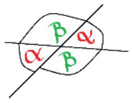
Wyzwanie 7 dni. Dzień3. Planimetria – zadania na dowodzenie

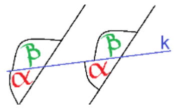
Zadania z wykorzystaniem metody „spaceru po kątach”.

I. CZĘŚĆ TEORETYCZNA

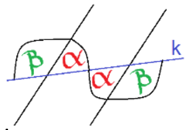
1) **Rodzaje katów oraz ich własności**
   a. **2 proste przecinające się**
      i. Kąty wierzchołkowe ($\beta = \beta, \alpha = \alpha$)
      ii. Kąty przyległe ($\alpha + \beta = 180°$)



   b. **2 proste równoległe przecięte trzecią prostą**
      i. Kąty odpowiadające (po tej samej stronie **prostej k**) ($\beta = \beta, \alpha = \alpha$)



      ii. Kąty naprzemianległe (po przeciwnych stronach **prostej k**) (wew. i zew) ($\alpha = \alpha, \beta = \beta$)

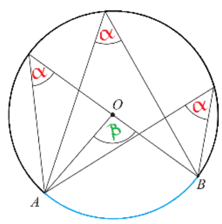


   c. **Dwusieczna kąta –** dzieli kąt na połowy

2) **Własności kątów w trójkątach:**
   a. Suma miar kątów w trójkącie to $180°$
   b. W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie są równe

3) **Własności kątów w czworokątach:**
   a. Suma miar kątów w czworokącie to $360°$
   b. W trapezie równoramiennym kąty przy podstawie są równe
   c. W równoległoboku suma kątów przy wybranym boku to $180°$
   d. Przekątne w rombie przecinają się pod kątem $90°$
   e. Promień okręgu pada pod kątem $90°$ do stycznej
   f. **Tw. o okręgu opisanym na czworokącie:** na czworokącie można opisać okrąg tylko wtedy gdy suma kątów naprzeciwległych wynosi $180°$.

4) **Kąty w kole**
   a. Kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają równą miarę $\alpha = \alpha = \alpha$
   b. Kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt wpisany jest 2 razy $\beta = \mathbf{2}\alpha$

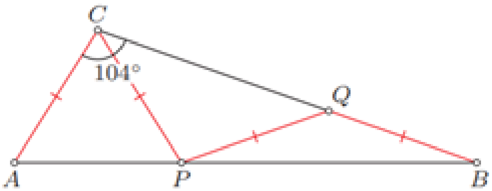


Metoda “spaceru po kątach” w zadaniach

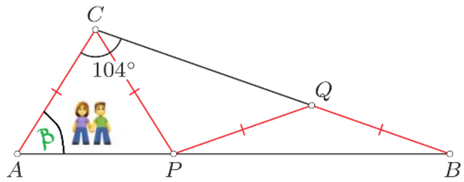
a. Dość częstą praktyką stosowaną w rozwiązywaniu zadań maturalnych z planimetrii jest wyznaczanie pozostałych kątów na podstawie jakiegoś jednego podanego.
b. Ten jeden kąt najczęściej sami musimy sobie w którymś miejscu ustalić.
c. Gdy już mamy jeden ustalony to „spacurejmy” po kolejnych kątach, które jesteśmy w stanie wyznaczyć, aż uzyskamy kąt, o który pytają w zadaniu lub wyczerpiemy możliwość wyznaczania nowych kątów.

Przykład.1

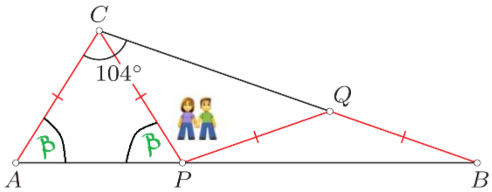
Na bokach AB i BC trójkąta ABC leżą odpowiednio takie punkty P i Q (różne od wierzchołków trójkąta), że $AC = CP = PQ = QB$. Wiedząc, że $\sphericalangle ACB = 104^\circ$, wyznacz miary pozostałych kątów trójkąta ABC.



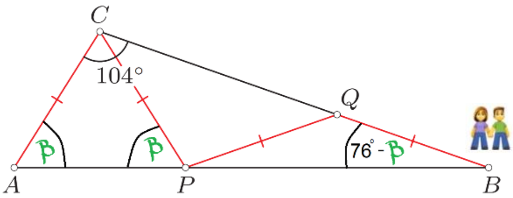
1) **KROK 1.** Ustalamy w którym miejscu rozpoczynamy nasz „spacer” – wybieramy jeden z kątów.
Ustalmy, że to będzie kąt BAC. Oznaczmy go jako β.



2) **KROK 2.** Wyznaczamy kolejny kąt, na podstawie dotychczas oznaczonego. Przyglądamy się wszystkim trójkątom, które posiadają kąt β.
   a. ΔAPC zawiera kąt β i jest dodatkowo równoramienny, zatem również $[APC] = \beta$



   b. ΔABC zawiera kąt β . Suma kątów w Δ to $180°$, a zatem $[ABC] = 180° - 104° - \beta = 76° - \beta$



3) **KROK 3.** Powtarzamy ‘’spacer po kątach’’, aż uzyskamy oznaczone na rysunku wszystkie możliwe kąty wewnątrz trójkata ABC.
W ten sposób możemy wyznaczyć kolejne miary kątów np. w takiej oto kolejności:
$[QPB] =$
$[PQB] =$
$[PQC] =$
$[PCQ] =$
$[ACP] = \qquad = \qquad (na\ 2\ sposoby)$

Z ostatniego równania będziemy mogli wyliczyć miarę kąta β, a co za tym idzie wszystkie kąty w trójkącie ABC.

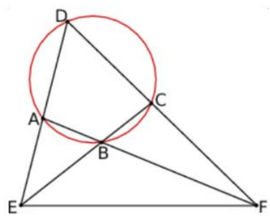
II. CZĘŚĆ PRAKTYCZNA

I. Metodę “spaceru po kątach” można często wykorzystać w zadaniach z okręgiem opisanym na czworokącie

1. Na czworokącie ABCD opisano okrąg. Miara kąta A jest o $46°$ mniejsza od miary kąta C i o $30°$ większa od miary kąta B. Oblicz miary kątów tego czworokąta.
2. Na czworokącie ABCD opisano okrąg. Miary kolejnych kątów przy wierzchołkach A,B,C,D tworzą ciąg **geometryczny**. Oblicz miary wszystkich kątów w tym czworokącie.
3. Przedłużenia przeciwległych boków czworokąta wpisanego w okrąg tworzą kąty ostre o mierze 30 i 60 stopni. Oblicz miary kątów czworokąta.

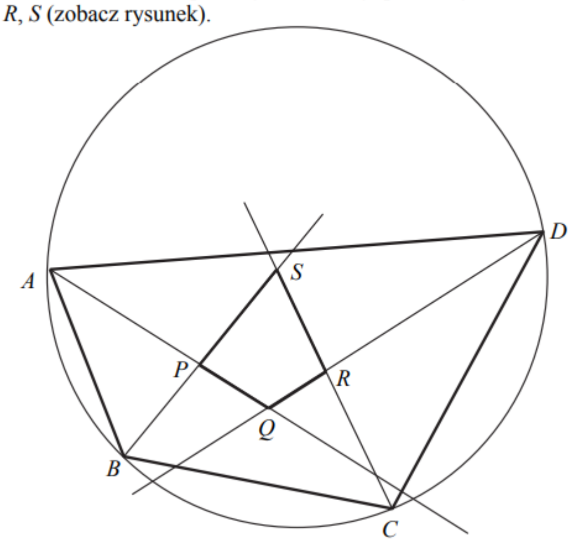
II. Metodę “spaceru po kątach” można też wykorzystać w zadaniach na dowodzenie

1. Na czworokącie ABCD opisano okrąg. Miary kolejnych kątów przy wierzchołkach A,B,C,D tworzą ciąg **geometryczny**. Wykaż, że czworokąt ABCD jest rombem.
2. Dany jest trapez ABCD, w którym AB || CD. Na boku BC wybrano taki punkt E, że |EC| = |CD|. Wykaż, że trójkąt AED jest prostokątny.
3. Dany jest równoległobok ABCD, w którym bok AB jest 2 razy dłuższy od boku BC. W połowie odcinka AB zaznaczono punkt K. Udowodnij, że środek okręgu opisanego na trójkącie DCK, leży na środku podstawy CD.
4. Dane są 4 okręgi. Każdy z nich jest styczny zewnętrznie do dokładnie dwóch spośród trzech pozostałych okręgów. Wykaż, że punkty styczności tych okręgów są wierzchołkami czworokata, na którym mozna opisać okrąg.
5. Odcinki AK i BL są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC, a punkt S jest punktem ich przecięcia. Wykaż, że na czworokącie ABCD można opisać okrąg.
6. Czworokąt ABCD wpisano w okrąg. Nastęnie przedłużono jego boki w taki sposób, że spotkały się w punktach E oraz F. Połączona punkty EF, po czym okazało się, że EC leży na dwusiecznej kąta DEF, oraz AF leży na dwusiecznej kąta CFE. Wykaż, że kąt EDF ma miarę 60 stopni.



7. **Matura, maj 2015, zad.9. (3pkt)**

Zadanie 9. (0–3)
Dwusieczne czworokąta *ABCD* wpisanego w okrąg przecinają się w czterech różnych punktach: *P*, *Q*, *R*, *S* (zobacz rysunek).

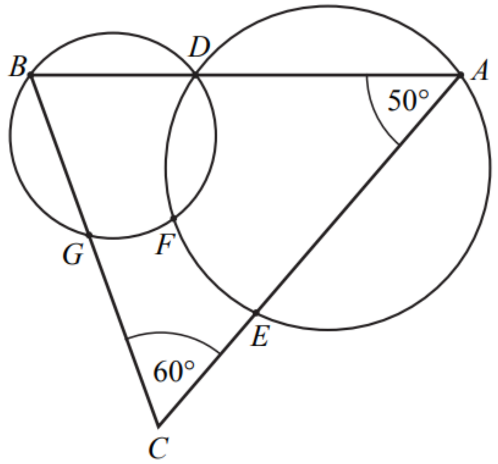


Wykaż, że na czworokącie *PQRS* można opisać okrąg.

8. Matura, czerwiec 2015, zad.9 (3 pkt)

Zadanie 9. (0−3)

W trójkącie ABC kąt wewnętrzny przy wierzchołku A ma miarę $50°$, a kąt wewnętrzny przy wierzchołku C ma miarę $60°$. Okrąg o_1 przechodzi przez punkt A i przecina boki AB i AC trójkąta odpowiednio w punktach D i E. Okrąg o_2 przechodzi przez punkt B, przecina okrąg o_1 w punkcie D oraz w punkcie F leżącym wewnątrz trójkąta ABC. Ponadto okrąg o_2 przecina bok BC trójkąta w punkcie G.

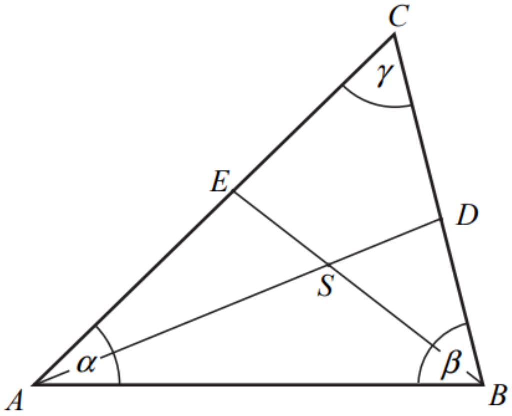


Udowodnij, że na czworokącie $CEFG$ można opisać okrąg.

9. Matura, czerwiec 2017, zad.8 (3 pkt)

Zadanie 8. (0–3)

Miary kątów trójkąta ABC są równe $\alpha=|\sphericalangle BAC|$, $\beta=|\sphericalangle ABC|$ i $\gamma=|\sphericalangle ACB|$. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, a proste zawierające odcinki AS i BS przecinają boki BC i AC tego trójkąta w punktach odpowiednio D i E (zobacz rysunek).

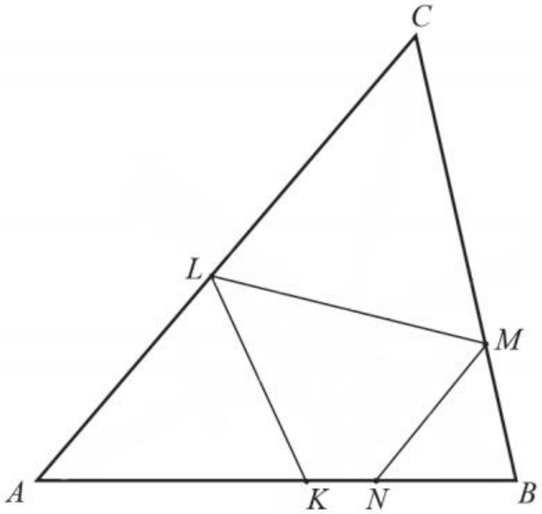


Wykaż, że jeżeli $\alpha+\beta=2\gamma$, to na czworokącie $DCES$ można opisać okrąg.

10. Matura, maj 2018, zad.7 (3 pkt)

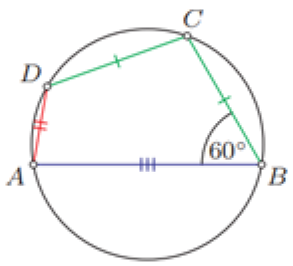
Zadanie 7. (0–3)

Trójkąt ABC jest ostrokątny oraz $|AC|>|BC|$. Dwusieczna d_C kąta ACB przecina bok AB w punkcie K. Punkt L jest obrazem punktu K w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_A kąta BAC, punkt M jest obrazem punktu L w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_C kąta ACB, a punkt N jest obrazem punktu M w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_B kąta ABC (zobacz rysunek).



Udowodnij, że na czworokącie $KNML$ można opisać okrąg.

11. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, przy czym $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ oraz $BC = CD$. Udowodnij, że $AB = AD + DC$.



12. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ wybrano taki punkt P, że

$$AP = AB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CPD = 90^\circ.$$

Wykaż, że $DP = 2 \cdot CP$.